31 格子點問題

31.1 格子點與面積

定理 31.1 在座標平面上，x, y 座標均為整數的點稱為格子點。三角形 ABC 的三個頂點均為格子點且除此之外，三角形 ABC 的內部（含邊上）無其它 x, y 座標均為整數的格子點。試證明此種三角形 ABC 的面積為 $\frac{1}{2}$.

【證明】

不妨設 $A=(0,0), B=(a,b), C=(c,d), D=(a+c,b+d)$ 且 a,b 互質（因為線段 AB 上沒有格子點）則過 C 點與直線 AB 平行的直線的方程式為 $bx-ay=bc-ad$ 。

也可以假設 $bc-ad>0$，若 $bc-ad>1$ 則根據二元一次不定方程式的整數解的公式，直線 $bx-ay=1$ 必在平行四邊形 $ABCD$ 內（含邊）有一個非頂點的格子點。事實上，容易由此推得三角形 ABC 內（含邊）有一個非頂點的格子點；此與假設矛盾。故必須有 $bc-ad=1$，即三角形 ABC 的面積為 $\frac{1}{2}$ 。

31.2 皮克公式

由前小節的定理可以得到底下的皮克公式。

定理 31.2(皮克公式) 設 $P_1P_2\cdots P_n$ 為平面上的 n 邊形且

$$P_1, P_2, \cdots, P_n$$

均為格子點。若 S 代表 n 邊形邊上的格子點數；I 代表 n 邊形內部的格子點數，則 n 邊形 $P_1P_2\cdots P_n$ 的面積為

$$\frac{S}{2}+I-1.$$

【証明】利用 n 邊形 $P_1P_2\cdots P_n$ 內部（含邊上）的格子點將此 n 邊形分割成有限個滿足前

一小節定理所敘述的面積為$\frac{1}{2}$的小三角形；再利用歸納的方法求得n邊形$P_1P_2\cdots P_n$的面積與S,I的關係，即得n邊形$P_1P_2\cdots P_n$的面積為

$$\frac{S}{2}+I-1.$$

定理 31.3(高斯定理)　設n為正整數且以原點為圓心，半徑為$\sqrt{n}$的圓內（含邊）的格子點數為R_n。試證明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{R_n}{n}=\pi.$$

【証明】在座標平面上，將格子點(x,y)對應到以

$$(x,y),(x+1,y),(x,y+1),(x+1,y+1)$$

為端點的單位正方形。因此半徑為$\sqrt{n}$的圓內（含邊）的R_n個格子點所對應的單位正方形都不相同，而且這些單位正方形都落在以原點為圓心，半徑為

$$\sqrt{n}+\sqrt{2}$$

的圓內；但卻包含了以原點為圓心，半徑為

$$\sqrt{n}-\sqrt{2}$$

的圓。因此有不等式

$$\pi(\sqrt{n}-\sqrt{2})^2\le R_n\le\pi(\sqrt{n}+\sqrt{2})^2.$$

即

$$\pi\left(1+\frac{2}{n}-\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{n}}\right)\le\frac{R_n}{n}\le\pi\left(1+\frac{2}{n}+\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{n}}\right)$$

由數列的‘挾擠定理’得到

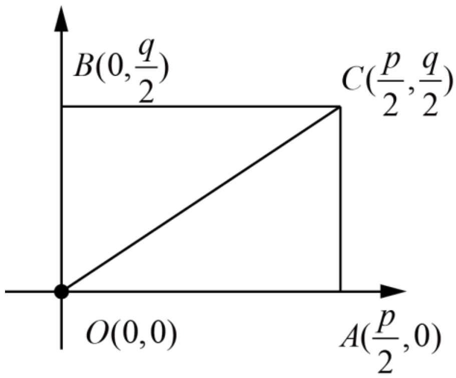
$$\lim_{n\to\infty}\frac{R_n}{n}=\pi.$$

31.3 高斯符號的應用

如果 x 是一個實數，高斯符號 $[x]$ 代表不超過 x 的最大整數，例如

$$[\frac{3}{2}]=1,[3]=3,[-\frac{1}{5}]=-1.$$

這小節要討論一則與高斯符號相關的數學問題：設 p 與 q 是兩個相異的奇質數，這兩個奇質數會產生如下的圖形：



我們的問題是

(1) 證明：矩形 $OACB$ 內部（不含邊上）共有

$$\frac{(p-1)}{2}\cdot\frac{(q-1)}{2}$$

個格子點。

(2) 證明：線段 OC 中間沒有格子點。

(3) 證明：三角形 OAC 內部（不含邊上）共有

$$\sum_{j=1}^{\frac{(p-1)}{2}}\left[j\cdot\frac{q}{p}\right]$$

個格子點。

(4) 證明：三角形 OBC 內部（不含邊上）共有

$$\sum_{j=1}^{\frac{(q-1)}{2}}\left[j\cdot\frac{p}{q}\right]$$

個格子點。

(5) 證明等式

$$\sum_{j=1}^{\frac{(p-1)}{2}}\left[j\cdot\frac{q}{p}\right]+\sum_{j=1}^{\frac{(q-1)}{2}}\left[j\cdot\frac{p}{q}\right]=\frac{(p-1)}{2}\cdot\frac{(q-1)}{2}.$$

這五部份的證明不難，把它們留作習題（可採取皮克公式）。

習題 31.1　費氏數列是指滿足下列條件的數列：

$$f_1=f_2=1, f_{n+2}=f_{n+1}+f_n.$$

試求由 $(0,0),(f_n,f_{n+1}),(f_{n+1},f_{n+2})$ 三點所構成三角形內部的格子點數。

習題 31.2　設 a,b,c,d 為正整數。若 $\frac{b}{a},\frac{d}{c}$ 滿足 $ad-bc=1$ 則介於 $\frac{b}{a}$ 與 $\frac{d}{c}$ 之間，分母最小的分數為何？

習題 31.3　設 $O=(0,0), A=(\frac{11}{2},0), B=(0,\frac{13}{2}), C=(\frac{11}{2},\frac{13}{2}).$

(1) 試求三角形 OAC 內部（不含邊上）共有多少個格子點。

(2) 試求三角形 OBC 內部（不含邊上）共有多少個格子點。

習題 31.4　證明：對任意大於 1 的正整數 m 與 n 恆有

$$\left[\frac{n}{m}\right]+\left[\frac{2n}{m}\right]+\cdots+\left[\frac{(m-1)n}{m}\right]=\left[\frac{m}{n}\right]+\left[\frac{2m}{n}\right]+\cdots+\left[\frac{(n-1)m}{n}\right].$$

習題 31.5　證明：對所有正整數 n 恆有

$$\left[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right]=\left[\sqrt{4n+2}\right].$$

動手玩數學

有三對男女情侶欲渡河，每人都會划船，只有一條船，每次至多只能搭兩個人。無論在任何情形下，每位女生都不願跟別的男生在一起，除非她的男朋友也在場。你能幫他們想出一個兩全其美的方法，讓三對男女情侶能順利渡河到對岸。

挑戰題

設 m,n 為正整數，證明

$$(m,n)=(m+n)-mn+2\sum_{i=1}^{m-1}\left[\frac{i\cdot n}{m}\right].$$

雙生質數問題

如果 P 與 Q 都是質數且滿足

$$Q-P=2$$

則稱 (P,Q) 為雙生質數數對，例如

$$(3,5),(5,7),(11,13),(17,19),\cdots$$

等都是雙生質數數對。是否存在無窮多對雙生質數數對一直是解析數論上的一個大難題。截至目前為止，所知道的結果是：雙生質數數對中的每個質數的倒數和收斂。這告訴我們雙生質數數對是很稀少的數對。